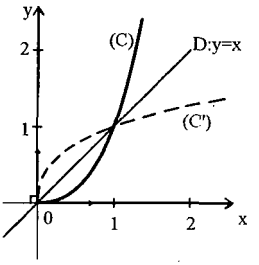
x	0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	+	
$\varphi(x)$	0	↗	$+\infty$



b- Soit $x \in [0;+\infty[$; $\varphi(x) - x = (x-1)e^x + 1 - x = (x-1)[e^x - 1]$

Or pour $x \geq 0$ on a $e^x \geq e^0 = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$.

D'où $\text{sig}(\varphi(x) - x) = \text{sig}(x-1)$; $\forall x \in [0;+\infty[$

Ce qui permet de drésser le tableau de position relative suivant:

x	0		1		$+\infty$
signe de $\varphi(x)-x$	0	−	0	+	
position relative	(C) est au dessus de D		(C) est dessous de D		

2/a- φ est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$\Rightarrow$ φ est une bijection de $[0;+\infty[$ sur $\varphi([0;+\infty[) = [0;+\infty[$.

b- (C') est le symétrique de (C) par rapport D:y = x.

- Sur $[0;1]$ on a (C) est au dessous de D donc (C') est au dessus de D.
- Sur $[1;+\infty[$ on a (C) est au dessus de D donc (C') est au dessous de D.

3/a- • $u_0 = 2 > 1 \Rightarrow$ la proposition est vraie pour n = 0.

$\star$ Soit $p \in$ IN. Supposons que $u_p > 1$; montrons que $u_{p+1} > 1$.

$u_p > 1 \Leftrightarrow \varphi^{-1}(u_p) > \varphi^{-1}(1)$

(car φ^{-1} est strictement ↗ sur $[0,+\infty[$ puisque φ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$)

$\Leftrightarrow u_{p+1} > 1$ car $\varphi^{-1}(1) = 1$ puisque $\varphi(1) = 1$.

conclusion : • et $\star \Rightarrow \forall n \in$ IN on a $u_n > 1$.

b- On a (C') est au dessous de D:y=x sur $[1;+\infty[$ **d'après 2/b-**

$\Rightarrow \forall x \in]1;+\infty[; \varphi^{-1}(x) < x$

Or $\forall n \in$ IN on a $u_n \in]1;+\infty[$ alors $\forall n \in$ IN ; $\varphi^{-1}(u_n) < u_n$

$\Leftrightarrow \forall n \in$ IN; $u_{n+1} < u_n$.

Par suite (u_n) est strictement décroissante sur IN.

c- (u_n) est strictement décroissante IN et minorée par 1 sur IN

$\Rightarrow (u_n)$ est convergente.

Posons L la limite de (u_n).

Comme $\forall n \in$ IN; $u_n > 1$ alors $L = \lim_{n \to +\infty} u_n \geq 1$.